EZ-OHIKO DEIALDIKO AZTERKETA

Ariketa 1	Ariketa 2	Ariketa 3	Ariketa 4	Ariketa 5	Ariketa 6	Ariketa 7	Ariketa 8	Guztira

Iraupena: 3 ordu

OHARRA: Azterketako emaitza guztiak behar den bezala arrazoitu behar dira.

IZEN ABIZENAK:

TALDEA:

1.- Kalkulatu $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\sqrt[2]{2!}+\sqrt[3]{3!}+\ldots+\sqrt[n]{n!}}{n^2}$

(2 puntu)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+\sqrt[2]{2!}+\sqrt[3]{3!}+\ldots+\sqrt[n]{n!}}{n^2}\overset{(1)}{=}\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n^2-(n-1)^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{2n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{2n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n!}{(2n)^n}}\overset{(2)}{=}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(2n)^n}\cdot\frac{(2n-2)^{n-1}}{(n-1)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{(2n)^n}\cdot\frac{(2n-2)^n}{(2n-2)}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n-2}{2n}\right)^n=\frac{1}{2}A\overset{(*)}{=}\frac{1}{2e}$$

$$(*)\ \ \mathrm{L}A=\lim_{n\to\infty}n\mathrm{L}\left(\frac{2n-2}{2n}\right)=\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{2n-2}{2n}-1\right)=\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{2n-2-2n}{2n}\right)=-1\quad\Leftrightarrow\quad A=e^{-1}$$

(1) $\{n^2\}$ hertsiki gorakorra eta dibergentea da, beraz Stolz-en irizpidea erabil daiteke.

(2) Zatidura-errodura aplikatuz

2.- Aztertu hurrengo serieen izaera:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3^n+n}+\frac{1-\cos\left(\frac{1}{n}\right)}{n}\right)$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(3n)!}$

(2 puntu)

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3^n+n}+\frac{1-\cos\left(\frac{1}{n}\right)}{n}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n+b_n\right)$, non $a_n\geq 0$ eta $b_n\geq 0\quad\forall n$

$a_n=\dfrac{1}{3^n+n}\sim\dfrac{1}{3^n}$ eta $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}$ serie geometrikoa da, $r=\dfrac{1}{3}<1\Rightarrow\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}$ konbergentea da, beraz $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ konbergentea da.

$b_n=\dfrac{1-\cos\left(\frac{1}{n}\right)}{n}\sim\dfrac{\frac{\left(\frac{1}{n}\right)^2}{2}}{n}=\dfrac{1}{2n^3}$ eta $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n^3}=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$ konbergentea da, beraz $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ konbergentea da.

Orduan $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3^n+n}+\frac{1-\cos\left(\frac{1}{n}\right)}{n}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n+b_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n+\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ konbergentea da.

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(3n)!}=\sum_{n=1}^{\infty}a_n$, non $a_n\geq 0\quad\forall n$

D´Alambert-en irizpidea erabiliz:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{((n+1)!)^2}{(3n+3)!}\cdot\frac{(3n)!}{(n!)^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{(3n+3)(3n+2)(3n+1)}=0<1$$

Beraz, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(3n)!}$ konbergentea da.

3.- Kalkulatu $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+2}{5^{2n}} \cdot x^{2n+1}$ **berretura-seriearen batura, zein den bere konbergentzi arloa aztertuz.**

(2 puntu)

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+2}{5^{2n}} \cdot x^{2n+1} = S(x) \quad \forall x \in (-R, R)$. Eta, integragarria da $\forall x \in (-R, R)$:

$$\int S(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+2}}{5^{2n}} \overset{(1)}{=} \frac{x^2}{1-\frac{x^2}{25}} = \frac{25x^2}{25-x^2} \quad \forall x \in (-5, 5)$$

(1) Serie geometrikoa da, $r = \frac{x^2}{25} \Rightarrow$ konbergentea $\Leftrightarrow \ |r| = \frac{x^2}{25} < 1 \Leftrightarrow |x| < 5$

Eta, deribatuz:

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+2}{5^{2n}} \cdot x^{2n+1} = \left(\frac{25x^2}{25-x^2} \right)' = \frac{50x\left(25-x^2\right)+50x^3}{\left(25-x^2\right)^2} = \frac{1250x}{\left(25-x^2\right)^2} \quad \forall x \in (-5, 5)$$

$x = 5$ puntuan: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+2}{5^{2n}} \cdot x^{2n+1} = 5\sum_{n=0}^{\infty}(2n+2)$, serie dibergentea $\Rightarrow \nexists S(x)$

$x = -5$ puntuan: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+2}{5^{2n}} \cdot x^{2n+1} = -5\sum_{n=0}^{\infty}(2n+2)$, serie dibergentea $\Rightarrow \nexists S(x)$

Beraz, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+2}{5^{2n}} \cdot x^{2n+1} = \frac{1250x}{\left(25-x^2\right)^2} \quad \forall x \in (-5, 5)$

4.- $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y^3\cdot e^{x^2+y^2}}{\left(x^2+y^2\right)^2} & \forall(x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ **funtzioa emanik:**

a) Aztertu bere diferentziagarritasuna $(0,0)$ puntuan.

b) Kalkulatu bere deribatu direkzionala $(0,0)$ puntuan, $\vec{u}=(2,3)$ bektorearen norabidean

(2 puntu)

a) Diferentziagarria izateko BBN erabiliko dugu:

f diferentziagarria da (0,0) puntuan $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{f(h,k)-f(0,0)-h\cdot f'_x(0,0)-k\cdot f'_y(0,0)}{\sqrt{h^2+k^2}}=0$$

$$\left.\begin{array}{l} f'_x(0,0)=\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{0}{h^4}-0}{h}=0\\ f'_y(0,0)=\displaystyle\lim_{k\to 0}\frac{f(0,k)-f(0,0)}{k}=\lim_{k\to 0}\frac{\frac{0}{k^4}-0}{k}=0\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{f(h,k)-f(0,0)-h\cdot f'_x(0,0)-k\cdot f'_y(0,0)}{\sqrt{h^2+k^2}}=\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{\frac{h^2k^3\cdot e^{h^2+k^2}}{\left(h^2+k^2\right)^2}}{\sqrt{h^2+k^2}}=$$

$$=\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{h^2k^3\cdot e^{h^2+k^2}}{\left(h^2+k^2\right)^2\sqrt{h^2+k^2}}\overset{(1)}{=}\lim_{\substack{\rho\to 0^+\\ \forall\theta}}\frac{\rho^5\cos^2\theta\cdot\sin^3\theta\cdot e^{\rho^2}}{\rho^4\cdot\rho}=\cos^2\theta\cdot\sin^3\theta\quad\Rightarrow$$

$\Rightarrow$ limite hori ez da existitzen, beraz, *f* ez da diferentziagarria (0,0) puntuan.

(1) polarretan: $\begin{cases}h=\rho\cdot\cos\theta\\ k=\rho\cdot\sin\theta\end{cases}$

b) *f* diferentziagarria ez denez (0,0) puntuan, deribatu direkzionalak definizioz kalkulatu behar ditugu, hau da:

$\forall\vec{u}=\left(h_1,h_2\right)$ unitarioa, $\left.\dfrac{df}{d\vec{u}}\right|_{(0,0)}=\displaystyle\lim_{\lambda\to 0}\frac{f\left(\lambda h_1,\lambda h_2\right)-f(0,0)}{\lambda}$

Kasu honetan, $\vec{u}=(2,3)$ unitario bihurtu behar dugu: $\vec{u}=\left(\dfrac{2}{\sqrt{13}},\dfrac{3}{\sqrt{13}}\right)=\left(h_1,h_2\right)$

$$\left.\frac{df}{d\vec{u}}\right|_{(0,0)}=\lim_{\lambda\to 0}\frac{\frac{\lambda^5\cdot h_1^2\cdot h_2^3\cdot e^{\lambda^2}}{\lambda^4}}{\lambda}=\lim_{\lambda\to 0}\frac{\lambda^5\cdot h_1^2\cdot h_2^3\cdot e^{\lambda^2}}{\lambda^5}=h_1^2\cdot h_2^3=\left(\frac{2}{\sqrt{13}}\right)^2\cdot\left(\frac{3}{\sqrt{13}}\right)^3=\frac{4\cdot 27}{13^2\cdot\sqrt{13}}$$

5.- $F(x,y,z)=x^2z^2+2y^2z+2z-8$ **funtzioa eta** $P(x,y,z)=(0,1,a)$ **puntua emanik,**

a) Aurkitu $a\in\mathbb{R}$ **parametroaren balioa,** $F(x,y,z)=0$ **ekuazioak** $z=z(x,y)$ **funtzio inplizitu diferentziagarria defini dezan *P* puntuaren ingurunean.**

b) (0,1) puntutik abiatuz, aurkitu norabidea eta noranzkoa non $z=z(x,y)$ **funtzioaren hazkunderik azkarrena lortzen den.**

c) Aurkitu *P* puntuari dagokion maila-kurbaren ekuazioa.

d) Aurkitu *P* puntuari dagokion maila-kurbaren zuzen ukitzailearen ekuazioa puntu horretan.

(3 puntu)

a) Funtzio inplizituaren teorema egiaztatzen dela egiaztatuko dugu:

i. $F(P)=F(0,1,a)=2a+2a-8=4a-8=0 \quad \Leftrightarrow \quad a=2$

ii. $F'_x=2xz^2 \quad F'_y=4yz \quad F'_z=2x^2z+2y^2+2$ jarraituak dira $\mathbb{R}^3$ osoan.

iii. $F'_z(P)=2+2=4\neq 0$

Orduan, $a=2$ baliorako, $P(x,y,z)=(0,1,2)$ puntuaren ingurune batean $\exists! z=z(x,y)$ diferentziagarria, non $F(x,y,z(x,y))=0$ eta $z(0,1)=2$.

b) Norabidea eta noranzkoa non $z=z(x,y)$ funtzioaren hazkunderik azkarrena lortzen den gradiente bektoreak ematen ditu:

$$\overrightarrow{\nabla z}(0,1)=\left(z'_x(0,1),z'_y(0,1)\right)$$

$F(x,y,z(x,y))=0$ ekuazioan *x*-rekiko eta *y*-rekiko deribatuz:

$$\begin{cases} F'_x+F'_z\cdot z'_x=0 \\ F'_y+F'_z\cdot z'_y=0 \end{cases} \overset{P \text{ puntuan}}{\Rightarrow} \begin{cases} z'_x(0,1)=-\dfrac{F'_x(P)}{F'_z(P)}=-\dfrac{0}{4}=0 \\ z'_y(0,1)=-\dfrac{F'_y(P)}{F'_z(P)}=-\dfrac{8}{4}=-2 \end{cases}$$

c) *P* puntuari dagokion maila-kurbaren ekuazioa:

$$\begin{cases} F(x,y,z)=x^2z^2+2y^2z+2z-8=0 \\ z=2 \end{cases} \equiv \begin{cases} 4x^2+4y^2+4-8=0 \\ z=2 \end{cases} \equiv \begin{cases} x^2+y^2=1 \\ z=2 \end{cases}$$

($z=2$ planoan kokaturiko zirkunferentzia).

d) *P* puntuari dagokion maila-kurbaren zuzen ukitzailea gradientearekiko perpendikularra da beraz, zuzen ukitzailearen norabide-bektorea $(2,0)$ da. Orduan, $(0,1)$ puntuko zuzen ukitzailea honako hau da:

$$\begin{cases} \dfrac{x}{2}=\dfrac{y-1}{0} \\ z=2 \end{cases} \equiv \begin{cases} y=1 \\ z=2 \end{cases}$$

6.- Aurkitu $\begin{cases} x^2+y^2-z+4=0 \\ x+y-1=0 \end{cases}$ **baldintzak betetzen dituzten** $f(x,y,z)=3x+y-z$ **funtzioaren mutur erlatiboak.**

(2 puntu)

Lagrange-ren biderkatzaileen metodoa erabiliko dugu:

$$w(x,y,z)=3x+y-z+\lambda\left(x^2+y^2-z+4\right)+\mu\left(x+y-1\right)$$

Puntu kritiko baldintzatuak kalkulatzen hasten gara:

$$\begin{cases} \left.\begin{array}{l} w'_x=3+2\lambda x+\mu=0 \\ w'_y=1+2\lambda y+\mu=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} 3-2x+\mu=0 \\ 1-2y+\mu=0 \end{cases} \Rightarrow \mu=2x-3=2y-1 \Leftrightarrow x-y=2 \\ w'_z=-1-\lambda=0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda=-1 \qquad\qquad\qquad\qquad \Rightarrow \\ x^2+y^2-z+4=0 \\ x+y-1=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x-y-1=0 \\ x+y-1=0 \end{cases} \overset{Kenduz}{\Rightarrow} \quad y=0 \quad \Rightarrow \quad x=1 \quad \Rightarrow \quad z=5$$

Puntu kritiko bakar bat dago: $P(x,y,z)=(1,0,5)$

Orain, sailkatu behar dugu:

$$\left.\begin{array}{l} w''_{x^2}=2\lambda \\ w''_{y^2}=2\lambda \\ w''_{z^2}=w''_{xy}=w''_{xz}=w''_{yz}=0 \end{array}\right\} \Rightarrow d^2w(P)=-(dx)^2-(dy)^2<0 \quad \forall(dx,dy,dz)\neq(0,0,0)$$

Beraz, P maximo erlatibo baldintzatua da.

7.- a) Kalkulatu $V \equiv \begin{cases} \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{4}+\dfrac{z^2}{9} \le 1 \\ z \ge 0 \\ x \le y \end{cases}$ **solidoaren bolumena.**

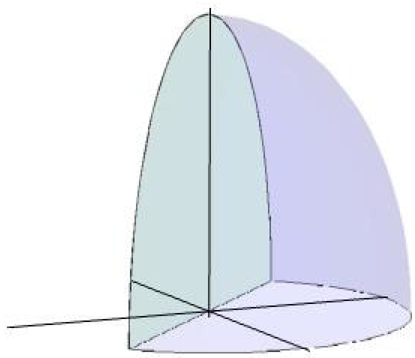
b) Kalkulatu V **solidoaren** S **mugatik irteten den** $\vec{F}(x,y,z) = x\cdot\vec{i} + y\cdot\vec{j} + 2z\cdot\vec{k}$ **bektorearen fluxua.**

(3.5 puntu)

a) V-ren bolumena $= \iiint_V dxdydz$

Koordenatu esferikoetan:

$$\boxed{\begin{cases} x = 2\rho\cos\theta\sin\varphi \\ y = 2\rho\sin\theta\sin\varphi \quad |J| = 12\rho^2\sin\varphi \\ z = 3\rho\cos\varphi \end{cases}}$$



$$\Rightarrow \quad V \equiv \begin{cases} \rho^2 \le 1 \\ \cos\varphi \ge 0 \\ \cos\theta \le \sin\theta \end{cases} \equiv \begin{cases} 0 \le \rho \le 1 \\ 0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2} \\ \dfrac{\pi}{4} \le \theta \le \dfrac{5\pi}{4} \end{cases}$$

$$\iiint_V dxdydz = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1 12\rho^2\sin\varphi\, d\rho\, d\varphi\, d\theta = \left(\frac{5\pi}{4}-\frac{\pi}{4}\right)\int_0^{\frac{\pi}{2}} 4\sin\varphi\, d\varphi = 4\pi\left(-\cos\varphi\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 4\pi$$

Koordenatu zilindrikoetan:

$$\boxed{\begin{cases} x = 2\rho\cos\theta \\ y = 2\rho\sin\theta \quad |J| = 4\rho \\ z = z \end{cases}} \Rightarrow V \equiv \begin{cases} \rho^2 + \dfrac{z^2}{9} \le 1 \\ z \ge 0 \\ \cos\theta \le \sin\theta \end{cases} \equiv \begin{cases} \dfrac{\pi}{4} \le \theta \le \dfrac{5\pi}{4} \\ 0 \le \rho \le 1 \\ 0 \le z \le 3\sqrt{1-\rho^2} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\iiint_V dxdydz = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}\int_0^1\int_0^{3\sqrt{1-\rho^2}} 4\rho\, dz\, d\rho\, d\theta = \left(\frac{5\pi}{4}-\frac{\pi}{4}\right)\int_0^1 4\rho\cdot 3\sqrt{1-\rho^2}\, d\rho = -6\pi\left.\frac{\left(1-\rho^2\right)^{3/2}}{3/2}\right|_0^1 = 4\pi$$

b) S gainazaletik irteten den $\vec{F}$-ren fluxua $= \iint_S \vec{F}d\vec{S}$

S, gainazal itxia, V solidoaren muga da. Eta, $\vec{F}$, eta, bere lehenengo deribatu partzialak jarraituak direnez, Gauss-en teorema erabil daiteke:

$$\iint_S \vec{F}d\vec{S} = \iiint_V div\left(\vec{F}\right)dxdydz \overset{(*)}{=} 4\iiint_V dxdydz = 4\cdot bolumena(V) = 16\pi$$

(*) $div\left(\vec{F}\right) = 1+1+2 = 4$

8.- $\vec{F}(x,y,z) = -y\cdot\vec{i} + x\cdot\vec{j} + z\cdot\vec{k}$ **eremu bektoriala emanik:**

a) Kalkulatu $S \equiv z = 4-2x^2-2y^2$**, non** $z \geq 2$**, gainazal irekia zeharkatzen duen fluxua.**

b) Kalkulatu $\vec{F}$ **-ren zirkulazioa** $C \equiv \begin{cases} z = 4-2x^2-2y^2 \\ z = 2 \end{cases}$ **kurban zehar.**

c) Kalkulatu $\vec{F}$ **-ren lerro-integarla** C **kurban zehar,** $A = (1,0,2)$ **puntutik** $B = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 2\right)$ **puntura.**

(3.5 puntu)

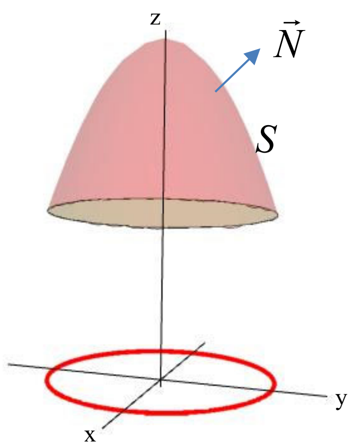
a) Bi eratan egin daiteke.

<u>Fluxuaren definizioa erabiliz</u>:

S gainazala zeharkatzen duen $\vec{F}$ -ren fluxua $= \iint_S \vec{F}d\vec{S} = \pm\iint_{R_{xy}} \left(\vec{F}\cdot\vec{N}\right)dxdy$

$S \equiv z = 4-2x^2-2y^2 \quad \forall(x,y) \in R_{xy} \equiv x^2+y^2 \leq 1$

$\vec{N} = (4x, 4y, 1) \quad \gamma < \frac{\pi}{2}$ (irteten den fluxua)



Orduan:

$$\iint_S \vec{F}d\vec{S} = \iint_{R_{xy}} \left(4-2x^2-2y^2\right)dxdy$$

Polarretan:

$$\begin{cases} x = \rho\cdot\cos\theta \\ y = \rho\cdot\sin\theta \end{cases} \quad |J| = \rho \quad \Rightarrow \quad R_{xy} \equiv \begin{cases} 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0 \leq \rho \leq 1 \end{cases}$$

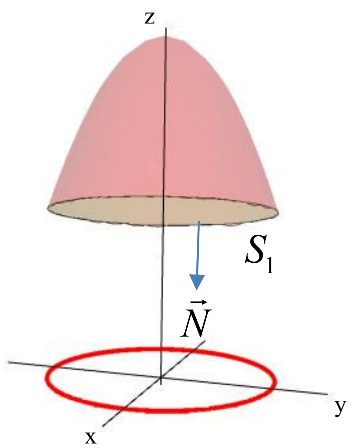
Beraz, $\iint_S \vec{F}d\vec{S} = \int_0^{2\pi}\int_0^1 \rho\left(4-2\rho^2\right)d\rho\, d\theta = 2\pi\left(2\rho^2 - \frac{\rho^4}{2}\right)_0^1 = 3\pi$

<u>Gauss-en teorema erabiliz (horretarako, S gainazala itxi beharko dugu)</u>:

Izan bedi $S_1 \equiv z = 2 \quad \forall(x,y) \in R_{xy}$.

Honela, $S' = S \cup S_1$ gainazal itxia definitzen dugu.

Horrez gain, $\vec{F}$ eta bere lehenengo deribatu partzialak jarraituak direnez, Gauss-en teorema erabil dezakegu:



$$\iint_{S'} \vec{F}d\vec{S} = \iint_S \vec{F}d\vec{S} + \iint_{S_1} \vec{F}d\vec{S} \overset{(GAUSS)}{=} \iiint_V div\left(\vec{F}\right)dxdydz$$

non $V \equiv 2 \le z \le 4 - 2x^2 - 2y^2$ eta $div\left(\vec{F}\right) = 1$

Integral hau zilindrikoetan ebatziko genuke:

$$\boxed{\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \quad |J| = \rho \\ z = z \end{cases}} \Rightarrow V \equiv 2 \le z \le 4 - 2\rho^2 \equiv \begin{cases} 0 \le \theta \le 2\pi \\ 0 \le \rho \le 1 \\ 2 \le z \le 4 - 2\rho^2 \end{cases}$$

Orduan:

$$\iint_{S'} \vec{F}d\vec{S} = \iiint_V dxdydz = \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_2^{4-2\rho^2} \rho\, dz\, d\rho\, d\theta = 2\pi\int_0^1 \rho\left(2 - 2\rho^2\right) d\rho = 2\pi\left(\rho^2 - \frac{\rho^4}{2}\right)_0^1 = \pi$$

Eta, orain, S_1 gainazaletik irteten den fluxua kalkulatuko dugu:

$$\iint_{S_1} \vec{F}d\vec{S} = \pm\iint_{R_{xy}} \left(\vec{F}\cdot\vec{N}\right)dxdy \overset{(1)}{=} -\iint_{R_{xy}} 2dxdy = -2\cdot \text{Azalera}\left(R_{xy}\right) = -2\pi$$

(1) $S_1 \equiv z = 2$, $\vec{N} = (0,0,1)$ non $\gamma > \dfrac{\pi}{2}$

Eta, beraz, $\iint_S \vec{F}d\vec{S} = \iint_{S'} \vec{F}d\vec{S} - \iint_{S_1} \vec{F}d\vec{S} = \pi - (-2\pi) = 3\pi$

b) $\vec{F}$-ren zirkulazioa C kurban zehar $= \oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \oint_C \left(\vec{F}\cdot\vec{r}'(t)\right)dt = \oint_C \left(-ydx + xdy + zdz\right)$

Bi eratan egingo dugu:

<u>Integrala kalkulatuz, C kurbaren parametrizazio naturala erabiliz</u>:

$$C \equiv \begin{cases} z = 4 - 2x^2 - 2y^2 \\ z = 2 \end{cases} \equiv \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ z = 2 \end{cases} \equiv \begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \quad 0 \le t \le 2\pi \\ z = 2 \end{cases}$$

Orduan: $\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi} \left(\sin^2 t + \cos^2 t\right)dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi$

<u>Stokes-en teorema erabiliz</u>:

$\vec{F}$ eta bere lehenengo deribatu partzialak jarraituak dira, eta, C kurba itxia eta leuna da, beraz:

$$\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \iint_{S_1} \overrightarrow{rot}\left(\vec{F}\right)d\vec{S}$$

non $S_1 \equiv z = 2 \quad \forall (x,y) \in R_{xy}$, eta, $\overrightarrow{rot}\left(\vec{F}\right) = (0,0,2)$

Orduan:

$$\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \iint_S \overrightarrow{rot}\left(\vec{F}\right)d\vec{S} = \pm\iint_{R_{xy}} \left(\overrightarrow{rot}\left(\vec{F}\right)\cdot\vec{N}\right)dxdy = \iint_{R_{xy}} 2dxdy = 2\pi$$

c) $\int\limits_{C(A\to B)} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int\limits_{C(A\to B)} \left(-ydx + xdy + zdz\right)$

Eta, aurreko atalean proposaturiko parametrizazio naturala erabiliz:

$$C \equiv \begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \\ z = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = (1,0,2) \Leftrightarrow t = 0 \\ B = \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}, 2\right) \Leftrightarrow t = \dfrac{\pi}{4} \end{cases} \Rightarrow \quad 0 \le t \le \frac{\pi}{4}$$

Beraz, $\int\limits_{C(A\to B)} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int\limits_{C(A\to B)} \left(-ydx + xdy + zdz\right) = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\sin^2 t + \cos^2 t\right) dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} dt = \frac{\pi}{4}$

<u>OHARRA</u>:

b) atalean Stokes-en teorema aplikatzen dugunean, C kurban zehar noranzko positiboan ibiltzen bagara, $S_1 \equiv z = 2$ gainazalari dagokion bektore normala gorantz norabidatuta egon behar da. Horregatik $\pm\iint\limits_{R_{xy}} \left(\overline{rot}\left(\vec{F}\right)\cdot \vec{N}\right) dxdy$ integralean + zeinua aukeratu dugu.